ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $z = f(x,y) = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgeyi bulunuz. xy düzleminde gösteriniz. **(10 puan)**

2) $\left.\begin{array}{l} u = x^2+y^2+2xy \\ v = \ln(x+y)+1 \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonel bağımlı mıdır? Evet ise aralarındaki ilişkiyi bulunuz. **(10 puan)**

3) Limitin δ, ε lu tanımını kullanarak $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sin(xy) = \sin(ab)$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**

4) $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. **(15 puan)**

5) $Q \subset \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=2x$ çemberinin içinde ve $x=1$ doğrusunun sağında kalan bölge ise $\iint\limits_Q \dfrac{xdxdy}{x^2+y^2}$ integralini hesaplayınız. **(15 puan)**

6) $\left.\begin{array}{l} u = f_1(x,y) = 4x+2y \\ v = f_2(x,y) = -3x+y \end{array}\right\}$ olarak tanımlanan $f = (f_1, f_2)$ vektör değerli fonksiyonunun tersini bulunuz. $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız. **(15 puan)**

7) $\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$ ise

a) $\dfrac{\partial x}{\partial r}.\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial \theta}.\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 1$ olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

b) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ Jakobiyenini (Jakobyen matrisinin determinantı) bulunuz. **(10 puan)**

Not: Sınav **09.07.2021** Cuma günü **09:00-11:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar **değerlendirilmeyecektir.** Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

ANALİZ IV , $\boxed{\text{BÜTÜNLEME}}$ ÇÖZÜMLER

2-) $u = x^2+y^2+2xy$, $v = \ln(x+y)+1$ ise u ile v fonksiyonel bağımlı mıdır? Evet ise aralarındaki ilişkiyi bulunuz.

Çözüm:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2y+2x \\ \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \end{vmatrix} = 0$$

olup u ile v arasında $F(u,v)=0$ formunda bir ilişki vardır.

$$u = x^2+y^2+2xy \implies u = (x+y)^2$$

$$\implies \ln u = 2\ln(x+y)$$

$$\implies \ln(x+y) = \frac{\ln u}{2}$$

$$v = \ln(x+y)+1 = \frac{\ln u}{2}+1$$

$$\implies v = \frac{\ln u}{2}+1$$

1) $1-\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \geq 0 \implies -1 \leq \frac{x+y}{x-y} \leq 1$ olmalıdır.

$x>y$, $\implies x-y>0$ iken $-1 \leq \frac{x+y}{x-y} \leq 1$ den

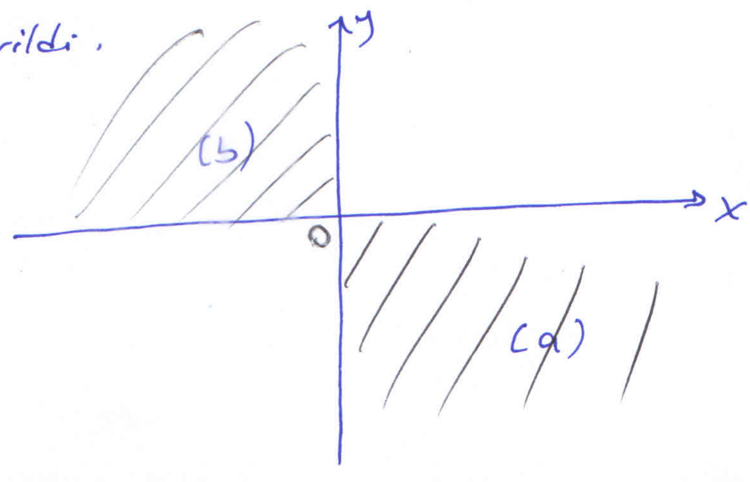
$-x+y \leq x+y \leq x-y$ ve $x+y \leq x-y$ den $y \leq 0$,

$-x+y \leq x+y$ den $x \geq 0$ bulunur. Bu bölge şekil (a).

$x<y$ iken, $x-y<0$, $-1 \leq \frac{x+y}{x-y} \leq +1 \implies -x+y \geq x+y \geq x-y$ ve

$x+y \geq x-y \implies y \geq 0$, $-x+y \geq x+y$ den $x \leq 0$ olur.

Bu ise (b) de gösterildi.



③ $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$ de $p = xy$, $q = ab$ yazılırsa

$$|\sin(xy) - \sin(ab)| = \left|2\cdot\sin\frac{xy-ab}{2}\cdot\cos\frac{xy+ab}{2}\right|$$

$$= 2\left|\sin\frac{xy-ab}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{xy+ab}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\cdot\left|\sin\frac{xy-ab}{2}\right| \leq |xy-ab| =$$

$$= |xy - ay + ay - ab| \leq |y||x-a| + |a||y-b|$$

($\left|\cos\frac{xy+ab}{2}\right| \leq 1$, sonra $|\sin u| \leq |u|$ kullanıldı.)

b nin komşuluğundaki y ler için $|y| < |b|+1$ old.

$$|\sin(xy) - \sin(ab)| < (|b|+1)|x-a| + |a||y-b| < \varepsilon$$

$$< (|b|+1)|x-a| + (|a|+1)|y-b|$$

$0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} = \delta_1$, $0 < |y-b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} = \delta_2$ seçilirse

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |y-b| < \delta$ için

$|\sin(xy) - \sin(ab)| < \varepsilon$ olur.

④ $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + y^2$

$f_x = 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{2}{3}$

$f_y = -3y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Kritik noktala $A(0,0)$, $B(0,\frac{2}{3})$, $C(-\frac{2}{3},0)$, $D(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

$f_{xx} = 6x+2$, $f_{yy} = -6y+2$, $f_{xy} = 0$, $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36xy + 12(x-y) + 4$

	f_{xx}	f_{yy}	Δ
$A(0,0)$	2		4
$B(0,2/3)$	2	-2	-4
$C(-\frac{2}{3},0)$	-2	2	-4
$D(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$	-2		4

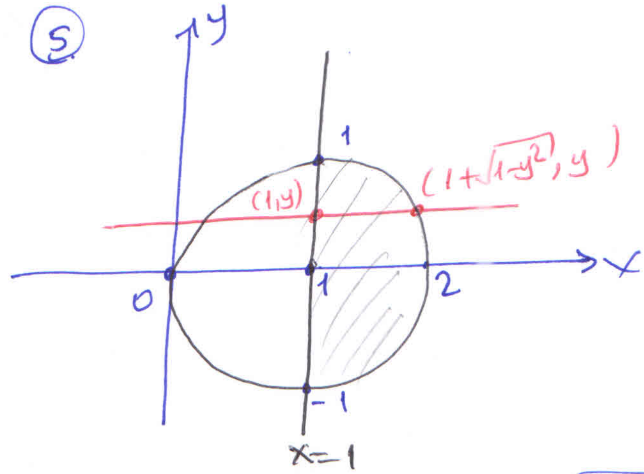
$A(0,0)$, yerel min.

$B(0,2/3)$, dönüm nok.

$C(-\frac{2}{3},0)$, dönüm nok.

$D(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, yerel maks.

(5)



$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

$M(1,0),\ r=1.$

$$\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_{-1}^{1}\left[\int_{1}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\right]dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_{1}^{1+\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\left[\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1-y^2) - \ln(1+y^2)\right) dy$$

$\boxed{\text{veya}}$ kutupsal koordinatlarda

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} = 2r\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{r = 2\cos\theta}$

$$\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\int_0^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2}\cdot r\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[r\cos\theta\Big|_0^{2\cos\theta}\right]d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[2\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

(6) $J = \dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ old. f nin lokal olarak tersi vardır. $f^{-1} = g = (g_1, g_2) \Rightarrow x = g_1(u, v),\ y = g_2(u, v)$ olur.

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{J} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{10} \cdot 1 = \dfrac{1}{10}$; $\quad \dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{3}{10}$;

$\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{5}$; $\quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{10} \cdot 4 = \dfrac{2}{5}$

(7) (a) $x_r = \sin\theta \cos\varphi$, $\quad x_\theta = r\cos\theta\cos\varphi$, $\quad x_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\quad \theta = \arccos\dfrac{z}{r}$, $\quad \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$

$2r r_x = 2x \Rightarrow r_x = \dfrac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$

$\theta = \arccos\dfrac{z}{r} \Rightarrow \theta_x = \dfrac{x r_x}{r^2} : \sqrt{1 - \dfrac{z^2}{r^2}} = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$, $\quad z_x = 0$

$\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi_x = \dfrac{-y/x^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{-\sin\varphi}{r\sin\theta}$

Bulunan bu değerle istenilen eşitlikte yerine yazılırsa çözüm gerçekleşir.

(b) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi +$
$+ r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin\theta + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$

$= r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^3\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$

$= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= r^2\sin\theta$